Géometrie des Groupes

Série 2 .... distribuée le mardi 31 octobre 2005

(1) Montrez que deux groupes libres de rang fini ou dénombrable sont isomorphes si et seulement s'ils ont même rang.

(2) Soit $\gamma \neq 1$ un élément d'ordre fini dans un produit libre $*_{i \in I} \Gamma_i$. Montrez qu'il existe un unique $j \in I$ tel que γ est conjugué a un élément de Γ_j.

(3) Montrez que le centre d'un produit libre non-trivial (i.e. avec au moins 2 facteurs non-triviaux) est trivial.

(4) (Plus difficile) On a une application naturelle $f : A * B \to A \times B$; soit K le noyau de f. Montrez que K est un groupe libre sur

$$X = \left\{ aba^{-1}b^{-1} : a \in A \setminus \{1\}, b \in B \setminus \{1\} \right\}.$$

(5) Soit G un groupe de transformations de $\mathbb{R}$ engendre par deux rotations de centres distincts. Montrez que G est isomorphe au produit libre $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$.

(6) Montrez par un exemple que la condition $|\Gamma_1| \geq 3$ est nécessaire dans le lemme du Ping-Pong.