Géometrie des Groupes

Série 3 . . . . . . distribuée le mardi 7 novembre 2005

(1) Soit $a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = a_2$ et $j = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Montrez que pour tous $s_1, \ldots, s_p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ avec $p \geq 2$ on a

$$a^{s_1} j a^{s_2} j \ldots a^{s_p} \infty \neq \infty.$$

Déduisez que pour tous $k, l \geq 1$ le groupe $\langle a^k j a^k, a^l j a^l \rangle$ est libre de rang 2.

(2) Dessinez le graphe de Cayley de $(\mathbb{Z}/2) * (\mathbb{Z}/q)$, muni de ses générateurs naturels, pour $q = 2, 3, 4$.

(3) Dessinez le graphe de Cayley de $*_{i=1}^{4}(\mathbb{Z}/2)$. Comparez avec un graphe de Cayley déjà dessiné. Généralisez.

(4) Dessinez le graphe de Cayley de $(\Gamma_1, \{a_1, j\})$.

(5) Si $\Gamma = \langle X | R \rangle$ est un groupe de présentation finie, et si Y est un ensemble générateur de Γ, alors montrez qu'il existe S de cardinalité au plus $|R| + |Y|$ avec $\Gamma = \langle Y | S \rangle$.