Géometrie des Groupes

Série 5 . . . . . . distribuée le lundi 21 novembre 2005

(1) Montrer que S_n est un produit semi-direct de A_n par $\mathbb{Z}/2$.

(2) Montrer que D_n (groupe diédral à $2n$ éléments) est un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/n$ par $\mathbb{Z}/2$, et que D_∞ est un produit semi-direct de $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2$.

(3) Montrer que S_3 et $\mathbb{Z}/6$ sont deux produits semi-directs de $\mathbb{Z}/3$ par $\mathbb{Z}/2$ (en particulier, le produit semi-direct n'est pas déterminé par ses facteurs).

(4) Soit $\mathrm{Sym}_0(\mathbb{Z})$ le groupe des permutations à support fini de $\mathbb{Z}$. Montrer que $\mathrm{Sym}(\mathbb{Z})$ contient le produit semi-direct $\mathrm{Sym}_0(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$, et que ce dernier groupe est engendré par deux éléments (alors que $\mathrm{Sym}_0(\mathbb{Z})$ n'est pas engendré par un nombre fini d'éléments).

(5) Soit P le polygone hyperbolique limité par deux demi-droites issues d'un sommet A, et formant un angle de $2\pi/p$. Calculez la présentation du groupe de Poincaré engendré par les réflexions dans ses cotés, et montrez que c'est un groupe diédral d'ordre $2p$.

(6) Prouvez que tout groupe abélien de type fini est de présentation finie.

(*indication*: Vous pouvez le faire "à la main", ou utiliser le théorème de Hilbert : "si R est un anneau noéthérien, alors $R[x_1, \ldots, x_n]$ est aussi noéthérien")

(7) En vous inspirant de la preuve du cours, montrez que si G est un groupe de type fini non trivial, alors le groupe

$$\{f : \mathbb{Z} \to G \text{ à support fini}\} \rtimes \mathbb{Z}$$

est de type fini, mais pas de présentation finie.

(*indication*: Procédéz comme dans le cours, en remplaçant le groupe symétrique S_3 par $G * G$)