Géometrie des Groupes

Série 6 . . . . distribuée le lundi 28 novembre 2005

(1) Montrez que le groupe fondamental d'une surface orientable de genre g peut être présenté comme

$$\Gamma_g = \langle a_1, \ldots, a_{2g} \,|\, a_1 \ldots a_{2g} a_1^{-1} \ldots a_{2g}^{-1} \rangle,$$

en considérant des identifications convenables entre les côtés d'un $4g$-gone.

(2) Donnez une présentation du groupe fondamental d'une surface non-orientable de genre g. (*indication*: cette surface peut être obtenue en "collant" un plan projectif à une surface orientable.)

(3) Calculez une présentation du groupe fondamental des noeuds de trêfle

Montrez que ces groupes ne sont pas isomorphes à $\mathbb{Z}$. *Question piège : est-ce que ces noeuds sont isotopes ?*

(4) Montrez que, dans la projection d'un noeud, le nombre de régions (y compris l'extérieur) est toujours deux de plus que le nombre de croisements.

(5) Montrez que le groupe fondamental d'un complément de noeud, quand on le présente avec un nombre minimal de générateurs et de relateurs, a toujours un générateur de plus que le nombre de relateurs.

(6) Montrez que si Γ est le groupe fondamental d'un complément de noeud, alors son abélianisé $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ est toujours isomorphe à $\mathbb{Z}$.