Géometrie des Groupes

Série 8................distribuée le lundi 12 décembre 2005

(1) Calculez la série de croissance de $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ engendré par 1.

(2) Montrez que pour deux groupes finis G et H de même ordre, il existe des systèmes générateurs S de G et T de H avec $\Gamma_{G,S}(z) = \Gamma_{H,T}(z)$.

(3) Calculez la série de croissance et le comportement asymptotique de la fonction $\gamma(n)$ pour le groupe $\mathbb{Z}^d$ engendré par une base.

(4) Si $G = \langle S \rangle$, alors la boule $B(S,m) = \{g \in G : ||g||_S \leq m\}$ de rayon m est aussi un système générateur.

Soit ζ une racine primitive m-ième de l'unité. Montrez que

$$\Gamma_{G,\,B(S,m)}(z) = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1-z}{1-\zeta^j \sqrt[m]{z}}\, \Gamma_{G,S}(\zeta^j \sqrt[m]{z}).$$

Déduisez que si $\Gamma_{G,S}$ est rationnelle, alors $\Gamma_{G,\,B(S,m)}(z)$ l'est aussi.

Application : Calculez $\Gamma_{\mathbb{F}_d,B(S,2)}$ où S est une base de $\mathbb{F}_d$.

(5) (Difficile) Si $G = \langle S \rangle$ et $H = \langle T \rangle$, exprimez $\Gamma_{G\times H,S\times T}$ en fonction de $\Gamma_{G,S}$ et $\Gamma_{H,T}$. Montrez que $\Gamma_{G\times H,S\times T}$ est rationnelle si $\Gamma_{G,S}$ et $\Gamma_{H,T}$ le sont. (Indication : “Produit de Hadamard”...)