# Géometrie des Groupes

## Série 8 . . . . . . . . . . . . . . . . distribuée le lundi 19 décembre 2005

(1) Comprenez la preuve du théorème suivant.

**Théorèm 1.** *Soit* $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ *une algebra commutative graduée engendrée par* $x_1, x_2, \ldots x_r \in A_1$. *Soit* $M$ *un* $A$*-module de type fini,* $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$. *On pose* $\Gamma_M(z) = \sum_{n \geq 0} \dim M_n z^n$.

(a) *Si* $M \leq N$ *sont des modules gradués, alors* $\Gamma_N = \Gamma_M + \Gamma_{N/M}$.

(b) *Si* $f \in A_d$, *soit*

$$\begin{aligned} \varphi : M &\to M \\ x &\mapsto fx. \end{aligned}$$

*Alors* $\ker \varphi$ *et* $\operatorname{coker} \varphi$ *sont des modules gradués sur* $A/\langle f \rangle$ *et*

(I) $$\left(1 - z^d\right) \Gamma_M = \Gamma_{\text{coker } \varphi} - z^d \Gamma_{\ker \varphi}.$$

(c) $$\Gamma_M = \frac{P(z)}{(1-z)^r}$$

*pour un polynôme* $p(z)$.

**Démonstration.**

(a) Exercice.

(b) On note $\varphi_{n-d} = \varphi|_{M_{n-d}} : M_{n-d} \to M^m$. On a

$$M_{n-d} / \ker \varphi_{n-d} \cong \text{im } \varphi_{n-d}.$$

Donc,

$$\dim M_{n-d} = \dim \text{im } \varphi_{n-d} + \dim \ker \varphi_{n-d}.$$

Mais (I) est l'énoncé que

$$\dim M^n - \dim M_{n-d} = \dim M^n - \dim \text{im } \varphi_{n-d} - \dim \ker \varphi_{n-d}.$$

(c) Si $r = 0$, c'est vari car $M$ est de dimension fini. Si $r > 0$, on applique (1b) avec $f = x_i$. Ainsi, par récurrence, $\Gamma_{\text{coker } \varphi}$ et $\Gamma_{\ker \varphi}$ sont de la forme (polynme) / $(1-z)^{r-1}$.

■

(2) Est-ce que vous arrivez à traduire la preuve en un langage ne faisant pas intervenir d'algèbre commutative ?

(3) Dans le groupe $G = \langle a, b, c \,|\, abc, cba \rangle$ (isomorphe à $\mathbb{Z}^2$),

(a) calculez les types de cônes, et

(b) calculez la série de corissance $\Gamma(z)$.

(4) Soit $G = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Montrez que la fonction de croissance de $G$ satisfait $\gamma(n) \geq 2^n$.