Géometrie des Groupes

Série 11 . . . . distribuée le lundi 16 janvier 2006

(1) Le groupe de Heisenberg est défini par

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

(a) Montrez qu'il est engendré par $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Vérifiez les relations $[u, s] = [u, t] = 1$, où $u = [s, t] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Montrez que G admet comme présentation $G = \langle s, t, u \,|\, u^{-1}[s, t], [u, s], [u, t] \rangle$.

(d) Déduisez que tout $g \in G$ s'écrit de manière unique comme $g = s^k t^l u^m$, en écrivant la matrice d'un tel g.

(e) En calculant $\left[s^k, t^l\right] = u^{kl}$, montrez

$$\begin{aligned} \left\| s^k t^l u^m \right\| &\leq |k| + |l| + 6\sqrt{|m|} \\ |k| + |l| &\leq \left\| s^k t^l u^m \right\| \\ \sqrt{|m|} &\leq \left\| s^k t^l u^m \right\| \end{aligned}$$

(f) Déduisez que $\gamma(n) \sim n^4$.

(2) Montrez que les seuls automates à 2 états ou moins, sur un alphabet à 2 lettres, et engendrant des groupes, sont (à permutation et suppression d'états redondants près) :

I : 　　　　　　II :

III : 　　　　　　IV :

V : 　　　　　　VI :

Montrez que les groupes engendrés sont respectivement

I : $\{1\}$, 　II : $\mathbb{Z}/2$, 　III : $\mathbb{Z}$,

IV : $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, 　V : D_∞, 　VI : $\mathbb{Z}/2 \wr \mathbb{Z}$.

(*indication*: pour VI, écrire $\{0, 1\}^\infty$ comme $\mathbb{F}_2[\![X]\!]$. Alors l'action de α, β s'écrit $\alpha(f) = (1+X)f$, $\beta(f) = (1 + X)f + 1$)