Géometrie des Groupes

Série 12 . . . . distribuée le lundi 20 janvier 2006

---

(1) Prouvez que pour G le groupe de Grigorchuk, le sous-groupe

$$K = \langle [a,b] \rangle^G$$

vérifie bien $|G/K| = 16$.

(2) Soit $k_0 = [a,b]^4$ et pour $n \geq 1$, soit k_n défini par

$$\phi^4(k_n) = (k_{n-1}, 1, \ldots, 1)$$

i.e., k_n agit comme k_n sur le sommet 0000 et trivialement ailleurs.

Prouvez que $\langle k_0, k_1, \ldots, k_n \rangle \sim \mathbb{Z}/2 \wr \mathbb{Z}/2 \wr \ldots \wr \mathbb{Z}/2$.

(3) En utilisant éventuellement un livre de théorie des goupes finis (voir "Kaloujnie-Krasner"), concluez (de l'exercice précédent) que tout 2-groupe fini est un sous-groupe de G.

(4) Soit $u_1 = [d, ada]$, et soit $v_1 = [d, acacadacaca]$. On définit $u_n = \sigma(u_{n-1})$ et $v_n = \sigma(v_{n-1})$ pour σ donné par

$$a \mapsto aca, b \mapsto d, c \mapsto b.$$

Montrez que $u_n = v_n = 1$ dans G.

Question subsidiaire (dure) : Montrez que

$$\langle a, b, c, d | a^2, b^2, c^2, d^2, bcd, u_n, v_n \rangle$$

est une présentation de G.